

ResearchGate

Google Scholar

I<sup>WORLD</sup>  
I<sup>of</sup>  
JOURNALS

НАУЧНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ  
БИБЛИОТЕКА  
**LIBRARY.RU**



**ISSN**

e-ISSN(Online) 2709-1201



МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

**ENDLESS LIGHT IN SCIENCE**

**NO 8**

**31 АВГУСТА 2026**

**Астана, Казахстан**



[lrc-els.com](http://lrc-els.com)

**МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ «ENDLESS LIGHT IN SCIENCE»**  
**INTERNATIONAL SCIENTIFIC JOURNAL «ENDLESS LIGHT IN SCIENCE»**



**Main editor:** G. Shulenbaev

**Editorial colleague:**

B. Kuspanova  
Sh Abyhanova

**International editorial board:**

R. Stepanov (Russia)  
T. Khushruz (Uzbekistan)  
A. Azizbek (Uzbekistan)  
F. Doflat (Azerbaijan)

International scientific journal «Endless Light in Science», includes reports of scientists, students, undergraduates and school teachers from different countries (Kazakhstan, Tajikistan, Azerbaijan, Russia, Uzbekistan, China, Turkey, Belarus, Kyrgyzstan, Moldova, Turkmenistan, Georgia, Bulgaria, Mongolia). The materials in the collection will be of interest to the scientific community for further integration of science and education.

Международный научный журнал «Endless Light in Science», включают доклады учёных, студентов, магистрантов и учителей школ из разных стран (Казахстан, Таджикистан, Азербайджан, Россия, Узбекистан, Китай, Турция, Беларусь, Кыргызстан, Молдавия, Туркменистан, Грузия, Болгария, Монголия). Материалы сборника будут интересны научной общественности для дальнейшей интеграции науки и образования.

31 АВГУСТА 2026 г.  
Астана, Казахстан

<https://doi.org/10.5281/zenodo.22791933>

УДК 538.9; 621.727

## ТОНКИЕ ПЛЕНКИ НИТРИДА ТИТАНА, ПОЛУЧЕННЫЕ МЕТОДОМ МАГНЕТРОННОГО РАСПЫЛЕНИЯ ПЕРСПЕКТИВНЫЕ ДЛЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В СОЛНЕЧНЫХ ЯЧЕЙКАХ

**ГУЧЕНКО СЕРГЕЙ АЛЕКСЕЕВИЧ**

Научный сотрудник НИЦ «ионно-плазменных технологий и современного приборостроения» физико-технического факультета, Карагандинского национального исследовательского университета им. Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан

**ТУЛЕУОВ СЕРИК ДАУЛЕТОВИЧ**

Инженер НИЦ «ионно-плазменных технологий и современного приборостроения» физико-технического факультета, Карагандинского национального исследовательского университета им. Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан

**ЖУМАБЕКОВА БАНУБИКЕШ ҚАЙРАТҚЫЗЫ**

Студентка группы ТФ-23р, кафедры Радиофизики и Электроники, физико-технического факультета, Карагандинского национального исследовательского университета им. Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан

Научный руководитель – **АФАНАСЬЕВ ДМИТРИЙ АНАТОЛЬЕВИЧ**  
Караганда, Казахстан

---

**Аннотация:** В работе исследованы тонкие пленки нитрида титана (TiN), полученные методом магнетронного распыления на кремниевых подложках и покровных стеклах. Сформированы нанокристаллические пленки со средним размером кристаллитов  $61 \pm 13$  нм. Установлена взаимосвязь между морфологическими характеристиками поверхности и структурой пленок: значения шероховатости составили  $Ra = 7,65$  нм и  $Rq = 9,13$  нм. Исследовано влияние материала подложки и мощности распыления на скорость осаждения. При увеличении мощности с 100 до 150 Вт скорость осаждения возросла с 4,13 до 9,55 нм/мин. Оптические исследования выявили плазмонный резонанс при энергии фотонов 1,6 эВ, а коэффициент поглощения достигал  $\alpha \approx 3 \times 10^5 \text{ см}^{-1}$  при энергии 3,7 эВ. По положению плазмонного минимума оценена концентрация свободных носителей заряда, составившая  $n \approx 2,7 \times 10^{21} \text{ см}^{-3}$ . Четырехзондовыми измерениями определено удельное сопротивление пленок, а совместный анализ оптических и электрофизических характеристик позволил оценить подвижность носителей заряда. Полученные результаты свидетельствуют о перспективности пленок TiN для применения в качестве электропроводящих и функциональных слоев в солнечных элементах, фотоэлектрических и плазмонных устройствах.

**Ключевые слова:** нитрид титана (TiN), тонкие пленки, магнетронное распыление, нанокристаллическая структура, оптические свойства, электрофизические свойства, солнечные элементы.

---

Полупроводниковые пленки нитрида титана (TiN) является перспективным материалом для применения в солнечных элементах, особенно в качестве недорогой и высокостабильной альтернативы традиционным электродам на основе благородных металлов, таких как золото и серебро [1, 2]. Однако, эта технология все еще находится на стадии активных исследований. Ведутся работы по исследованию свойств синтезированных пленок нитрида титана [3, 4].

В данной работе приведены результаты исследования оптических и электрических характеристик пленок TiN, полученных методом магнетронного распыления.

ОФ «Международный научно-исследовательский центр “Endless Light in Science”

Слои TiN получены методом магнетронного распыления на установке SCK-MSP-450-III. Установка позволяет использовать DC источники мощностью до 500 Вт с мишенями диаметром 2 дюйма. Для формирования активного слоя использовалась титановая мишень со степенью чистоты (99,99 %). Процесс нанесения пленки проводился в атмосфере аргона и азота. Для повышения равномерности покрытия использовалось вращение подложкодержателя.

В качестве подложек использовались полированные кремниевые пластины р-типа с ориентацией (100), толщиной 380 мкм и удельным сопротивлением 1–10 Ом·см. Перед напылением подложки очищались от загрязнений и пылевых частиц изопропиловым спиртом, высушивались и закреплялись на подложкодержателе.

Отдельно, в процессе нанесения в качестве контрольных образцов использованы покровные стекла. Данные образцы также использовались для измерения спектров поглощения пленок TiN. Спектры поглощения пленок измерялись с помощью миниспектрометра SR50C и дейтериевой лампы ДДС-30.

При исследовании морфологии поверхности использовался сканирующий электронный микроскоп (СЭМ) Tescan Mira-3. Проведен энерго-дисперсионный анализ образцов пленок. Измерены спектры EDX поверхности образца. Для анализа микроскопических снимков пленок использовалась программа ImageJ [5].

Электрические характеристики полученных тонкопленочных структур оценивались методом четырехзондовых измерений в соответствии с методикой, приведенной в [6].

### Результаты работы

Внешний вид синтезированных пленок приведен на рисунке 1. Условия синтеза пленок TiN приведены в таблице 1.

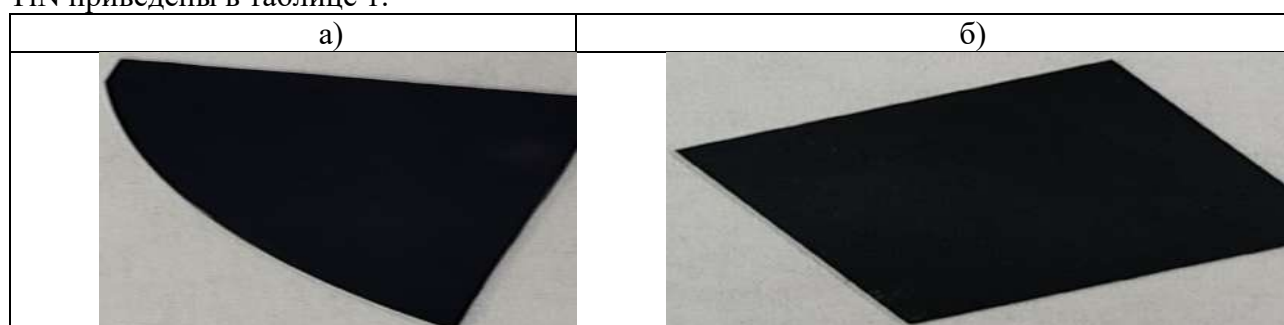


Рисунок 1. Тонкие пленки TiN на покровном стекле (а) и на кремниевой подложке (б)

Таблица 1. Условия напыления пленок TiN.

| Условия напыления           | 1-5 образцы                                                  | 6-8 образцы                                                |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| Мощность                    | 100 W                                                        | 150 W                                                      |
| Магнетрон                   | DC                                                           | DC                                                         |
| Мишень                      | Ti                                                           | Ti                                                         |
| Температура                 | 150 °C                                                       | 150 °C                                                     |
| Давление в вакуумной камере | 0.45 Па                                                      | 0.45 Па                                                    |
| Расход газа                 | Аргон 150 ст. см <sup>3</sup><br>Азот 14 ст. см <sup>3</sup> | Аргон 65 ст. см <sup>3</sup><br>Азот 5 ст. см <sup>3</sup> |
| Скорость скопа              | 10 оборот/минута                                             | 20 оборот/минута                                           |
| Время напыления             | 3000 с. (50 мин.)                                            | 3600 с. (60 мин.)                                          |

СЭМ снимки и морфология поверхности пленок TiN приведена на рисунке 2. Условия нанесения приведены в таблице 1. Размер нанокристаллитов пленки TiN составил  $61 \pm 13$  нм. EDS анализ показывает равномерность полученной пленки. Атомно-силовая микроскопия

показала следующие характеристики шероховатости пленок средняя шероховатость поверхности ( $R_a = 7.65$ ), среднеквадратичная шероховатость поверхности ( $R_q = 9.13$ ), высота неровностей профиля ( $R_z = 72.5$ ). Высота неровностей профиля, полученная АСМ микроскопией, коррелирует со средним размером микрокристаллитов пленок, полученных на СЭМ.

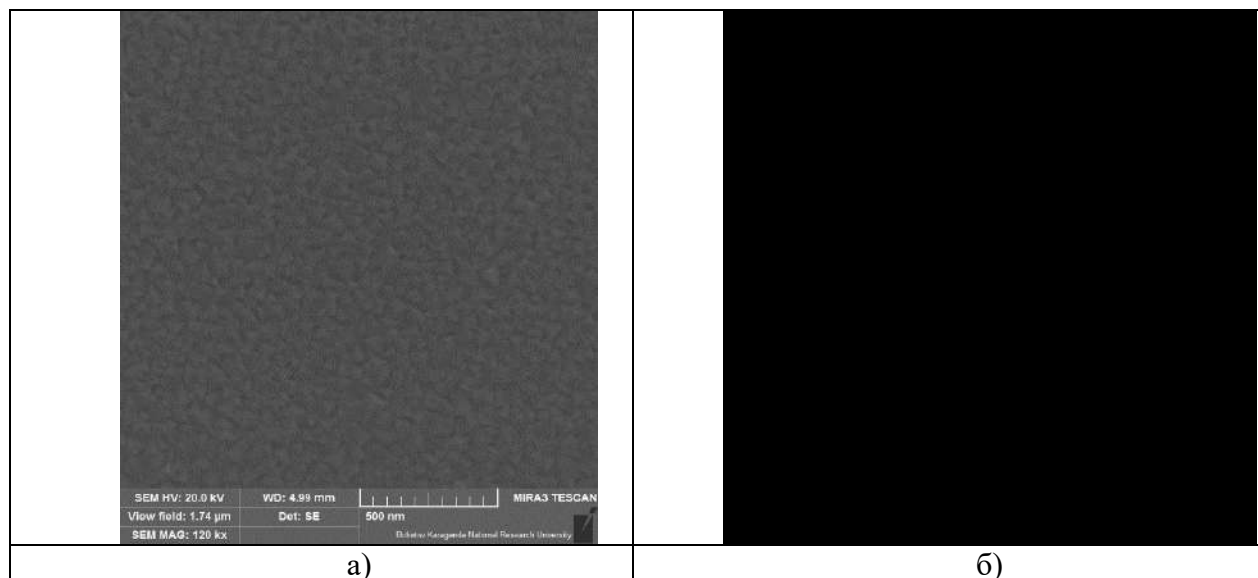


Рисунок 2. Морфология поверхности пленок TiN полученных на СЭМ (а) и АСМ (б).

По изменению массы подложки до нанесения пленок и после ее нанесения определена толщина пленок. Она приведена в таблице 2. Изменение данных параметров оказывает существенное влияние на структуру плёнок, концентрацию дефектов и, соответственно, на электрические свойства мемристорных структур. Результаты измерения массы пленок приведены в таблице 2. Из данных видно что при равных условиях нанесения пленок скорость роста пленок на поверхности кремния выше чем на поверхности стекла. Это связано с тем что, поверхность кремния является полупроводниковой, что позволяет ей проводить электрический ток и уменьшает формирование избыточного заряда на поверхности в результате магнетронного нанесения. Увеличение мощности магнетронного источника также увеличивает скорость роста пленок TiN на поверхности кремния. Рост мощности на 50 % привело к увеличению скорости более чем в 2 раза.

Таблица 2. Результаты определения толщины пленок и скорости роста пленок TiN

|                              | 1-3 образцы<br>(покрывное стекло) | 4-5 образцы<br>(кремний) | 6-8 образцы<br>(покрывное стекло) |
|------------------------------|-----------------------------------|--------------------------|-----------------------------------|
| Толщина пленок,<br>h         | $206,5 \pm 104$ нм, P=0.95        | 242,5 нм                 | $573 \pm 60,2$ нм, P=0.95         |
| Скорость роста<br>пленок TiN | $4,13 \pm 2,08$ нм/мин            | 4,85 нм/мин              | $9,55 \pm 1,00$ нм/мин            |

Спектр пропускания света пленкой TiN, полученных на поверхности стекла приведены на рисунке 3 (Образцы 1-3). Спектр плазмонного резонанса пленки приходится на на энергию фотонов  $E_{\min}=1,6$  эВ. В соответствии с формулой (1), была оценена концентрация электронов в пленке [7]:

$$n = \frac{\omega_p^2 m^* m_e \epsilon_0}{e^2} = \frac{E_{\min}^2 m^* m_e \epsilon_0}{\hbar^2 e^2} \quad (1)$$

Где,  $\omega_p$  – частота плазмонного резонанса,  $m^*$  – эффективная масса носителей заряда,  $m_e$  – масса электрона,  $\hbar$  – приведенная постоянная планка,  $e$  – заряд электрона,  $E_{\min}$  – минимум поглощения обусловленный поглощением в области плазмонного резонанса. Концентрация составила  $n \approx 1,1 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ . Коэффициент поглощения составил  $\alpha \approx 3 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$  при  $E \approx 3,7 \text{ эВ}$ . Эти значения соответствуют литературным данным [8, 9].

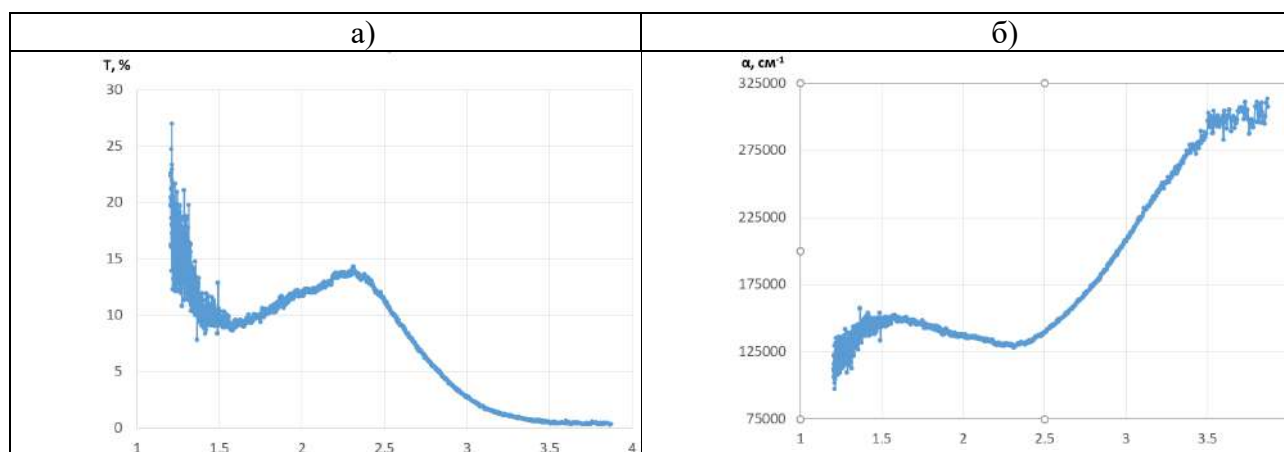


Рисунок 3. Спектр пропускания света (а) и зависимость коэффициента поглощения  $\alpha$  от энергии фотонов для пленки полученной на поверхности покровного стекла.

Далее были проведены исследования их электрических характеристик. Для измерения удельного сопротивления использовался четырёхзондовый метод.

Во время измерения через внешние зонды подаётся ток, а внутренними измеряется падение напряжения, после чего рассчитывается удельное сопротивление исследуемого образца. Величина тока была установлена равной от  $I = 0,1 \text{ мА}$  до  $I = 10 \text{ мА}$ . Результаты определения удельного сопротивления пленок приведены в таблице 3.

Для четырёх равноотстоящих зондов на большой однородной плёнке сопротивление определялось по формуле:

$$R_{\square} = \frac{\pi}{\ln 2} \frac{\Delta V}{I} = 4.532 \frac{\Delta V}{I} \quad (2)$$

Удельное сопротивление пленок определялось по формуле:

$$\rho = R_{\square} \cdot h \quad (3)$$

где  $h$  – толщина пленок TiN.

Подвижность носителей заряда определялась по формуле:

$$\mu = \frac{1}{en\rho} \quad (4)$$

$\mu$  – подвижность носителей заряда (в  $\text{см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$  или  $\text{м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ ),  $e$  – элементарный заряд,  $n$  – концентрация носителей заряда ( $\text{см}^{-3}$ , или  $\text{м}^{-3}$ ),  $\rho$  – удельное электрическое сопротивление ( $\text{Ом} \cdot \text{см}$  или  $\text{Ом} \cdot \text{м}$ ).

Результаты определения поверхностного, объемного удельного электрического сопротивления, концентрации носителей заряда и подвижности носителей заряда приведены в таблице 3. Концентрация и подвижность носителей заряда для полученных пленок

соответствует качественным пленкам, полученным методом термического осаждения атомных слоев (ALD) [10].

Таблица 3. Удельное электрическое сопротивление пленок TiN.

| № | $R_{\square}$<br>(Ohm/ $\square$ ) | $\rho$<br>(Ohm* m) | $n$<br>( $m^{-3}$ ) | $\mu$<br>( $m^2*B^{-1}*c^{-1}$ ) |
|---|------------------------------------|--------------------|---------------------|----------------------------------|
| 6 | 20.26                              | $11.61*10^{-6}$    | $1.2*10^{28}$       | $4.48*10^{-5}$                   |
| 7 | 17.22                              | $9.87*10^{-6}$     | $1.2*10^{28}$       | $5.31*10^{-5}$                   |
| 8 | 19.58                              | $11.22*10^{-6}$    | $1.2*10^{28}$       | $4.64*10^{-5}$                   |

Методом магнетронного распыления на кремниевых подложках и покровных стеклах получены тонкие пленки нитрида титана с контролируемыми условиями осаждения. Сформированы нанокристаллические пленки со средним размером кристаллитов  $61 \pm 13$  нм. Шероховатость поверхности ( $R_a = 7.65$  нм,  $R_q = 9.13$  нм) коррелирует с размером зерен, что подтверждает однородность структуры. Скорость осаждения на кремнии выше, чем на стекле, из-за полупроводниковых свойств подложки, уменьшающих накопление заряда. Увеличение мощности с 100 до 150 Вт приводит к росту скорости напыления более чем в 2 раза (с 4.13 до 9.55 нм/мин). Спектры пропускания демонстрируют плазмонный резонанс при энергии фотонов  $E_{min} = 1.6$  эВ ( $\lambda \approx 775$  нм). Коэффициент поглощения составляет  $\alpha \approx 3 \times 10^5$  см $^{-1}$  при  $E \approx 3.7$  эВ, что соответствует литературным данным для TiN. Оценка по положению плазмонного минимума дает концентрацию электронов  $n \approx 2.7 \times 10^{21}$  см $^{-3}$ , что характерно для вырожденного состояния TiN. Методом четырехзондовых измерений определено удельное сопротивление пленок. Совместный анализ оптических данных и измерения удельного сопротивления пленок позволил определить подвижность носителей заряда в синтезированных пленках нитрида титана.

Синтезированные пленки TiN обладают оптимальным сочетанием оптических (высокое поглощение в видимой области, плазмонный резонанс при 1.6 эВ) и электрофизических характеристик, что делает их перспективными для использования в качестве контактов для солнечных ячеек и активных слоев в солнечных элементах, фотоэлектрических и плазмонных устройствах. Установленные корреляции между условиями осаждения, структурой и свойствами открывают возможности для целенаправленной оптимизации параметров пленок под конкретные прикладные задачи.

Финансирование:

«Данное исследование финансируется Научным комитетом Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (ПЦФ № BR34636764)».

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Akhtary, N., Zubair, A. High efficiency titanium nitride bowtie nanoparticle and upconverter layer incorporated kesterite tandem solar cell// *RESULTS IN PHYSICS*, 2023, V.55, N.107148. DOI: 10.1016/j.rinp.2023.107148
2. Gasonoo, A.; Ahn, H.-S.; Lim, S.; Lee, J.-H.; Choi, Y. Color Glass by Layered Nitride Films for Building Integrated Photovoltaic (BIPV) System// *Crystals*, 2021, V.11, N.281(1-8). DOI: <https://doi.org/10.3390/cryst11030281>
3. Солован М.Н., Брус В.В., Марьянчук П.Д., Ковалюк Т.Т. Кинетические свойства тонких пленок TiN, полученных методом реактивного магнетронного распыления// *Физика твердого тела*. 2013. Т. 55. № 11. С. 2123-2127.-
4. Judek, J.; Wróbel, P.; Michałowski, P.P.; Oźga, M.; Witkowski, B.; Seweryn, A.; Struzik, M.; Jastrzębski, C.; Zberecki, K. Titanium Nitride as a Plasmonic Material from Near-Ultraviolet to Very-Long-Wavelength Infrared Range// *Materials*, 2021, V.14, N.7095(1-16). DOI: <https://doi.org/10.3390/ma14227095>
5. Ribeiro, G.P., Valotto, R.S., deOliveira, J.P., Guimarães, M.C.C., and Lenz, D. (2020). An inexpensive, automated and reproducible method to conduct quality control in nanoparticles. *Chem. Pap.* 74 (9), 2821–2824. doi:10.1007/s11696-020-01123-3
6. Makhabayeva A.T., Chirkova L.V., Guchenko S.A., Tuleuov S.D., Makhhanov K.M., Shakirzyanov R.I., Afanasyev D.A. Investigation of optical and electrical properties of titanium oxynitride films// *Eurasian Physical Technical Journal*, 2025, Vol.22, No. 4(54), P.15 - 20. <https://phtj.buketov.edu.kz/index.php/EPTJ/article/view/1311>
7. Shah, D., Reddy, H., Kinsey, N., Shalaev, V.M., Boltasseva, A. Optical Properties of Plasmonic Ultrathin TiN Films// *ADVANCED OPTICAL MATERIALS*, 2017, V.5, I.13, N.1700065(1-5). DOI: 10.1002/adom.201700065
8. J. Pflüger, J. Fink. Determination of optical constants by high-energy, electron-energy-loss spectroscopy (EELS), in *Handbook of optical constants of solids II*, Edward D. Palik, ed. Academic Press, 1991. P.293-310
9. J. Pflüger, J. Fink, W. Weber, K. P. Bohnen, G. Crecelius. Dielectric properties of TiCx, TiNx, VCx, and VNx from 1.5 to 40 eV determined by electron-energy-loss spectroscopy. *Phys. Rev. B*, 1984, V.30, P.1155-1163.
10. P. Goel, Chr. Kauppinen, R. Raju, I. Tittonen Thermoelectric and electronic transport properties of thermal and plasma-enhanced ALD grown titanium nitride thin films// *Nanoscale Advances*, 2025, V.8, I.2, P.612-622. DOI: <https://doi.org/10.1039/d5na00914f>

<https://doi.org/10.5281/zenodo.22791933>

## РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СОЛОУ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЭВОЛЮЦИИ

АМИРЕ АРУЖАН БАБАХАНКЫЗЫ

Студент факультета математики, физики и информатики  
Казахский национальный педагогический университет имени Абая

Научный руководитель – М. БЕКТЕМЕСОВ

Алматы, Казахстан

---

**Аннотация:** В статье рассматривается обратная задача для одномерной пространственной модели Солоу, в которой динамика удельного физического капитала описывается параболическим уравнением реакции–диффузии. Пространственная составляющая позволяет учитывать перемещение капитала между соседними территориями, а нелинейный член задается производственной функцией Кобба–Дугласа. Для идентификации коэффициента пространственной диффузии и нормы амортизации предлагается использовать алгоритм дифференциальной эволюции. Прямая задача решается методом линий с неявным интегрированием по времени, после чего параметры восстанавливаются путем минимизации среднеквадратичной ошибки между расчетными и наблюдаемыми данными. Численный эксперимент проведен на параметрах, использованных в опубликованных исследованиях пространственной модели Солоу. При добавлении 0,5% случайного шума алгоритм восстановил параметры с относительной ошибкой менее 0,1%, что подтверждает устойчивость выбранного вычислительного подхода.

**Ключевые слова:** Пространственная модель Солоу, обратная задача, дифференциальная эволюция, диффузия капитала, параметрическая идентификация, численное моделирование, оптимизация.

---

**Введение.** Модель экономического роста Р. Солоу занимает центральное место в неоклассической теории долгосрочного развития. В исходной постановке изменение запаса капитала определяется сбережениями, объемом производства и амортизацией, а производственная функция отражает зависимость выпуска от факторов производства [1]. Независимо от Солоу близкая модель накопления капитала была предложена Т. Своном [2]. Классическая постановка, однако, предполагает агрегированность экономического пространства и не позволяет непосредственно учитывать различия между территориями. Для анализа региональной неоднородности возникает необходимость включения пространственной координаты в динамику капитала.

Идея пространственного расширения модели Солоу была формализована в работе С. Samacho и В. Zou, где модель рассматривается в непрерывных времени и пространстве, а ее решения исследуются с точки зрения сходимости к стационарному состоянию [3]. Последующие исследования развили это направление, включая пространственную диффузию физического капитала и технологического прогресса [4, 5]. В частности, современные численные работы рассматривают пространственную модель Солоу как систему параболических уравнений и показывают возможность ее исследования в одномерных и двумерных ограниченных областях [5, 6]. Таким образом, пространственная компонента модели имеет не только теоретическое, но и вычислительное значение для изучения неоднородности регионального развития.

Отдельный интерес представляет обратная постановка задачи. В прямой задаче параметры модели считаются известными и по ним определяется динамика капитала. В обратной задаче, напротив, наблюдаемая динамика капитала используется для восстановления

неизвестных характеристик модели. Для пространственной модели Солоу подобная постановка непосредственно связана с идентификацией параметров и производственной функции; например, Engbers, Burger и Capasso сформулировали обратную задачу для пространственной модели Солоу и решали ее с помощью регуляризации Тихонова и градиентного метода [7]. В более поздних исследованиях также подчеркивается, что восстановление параметров пространственной модели остается актуальной задачей при наличии шума и неполных данных [8].

В настоящей работе предлагается альтернативный вычислительный подход: вместо градиентной оптимизации используется алгоритм дифференциальной эволюции (Differential Evolution, DE). Метод, предложенный R. Storn и K. Price, предназначен для глобальной оптимизации непрерывных нелинейных функций и не требует вычисления аналитического градиента целевой функции [9]. Это особенно важно в рассматриваемой задаче, поскольку каждое значение целевой функции связано с численным решением параболического дифференциального уравнения. Цель исследования состоит в проверке возможности восстановления коэффициента пространственной диффузии капитала и нормы его амортизации по зашумленным пространственно-временным данным с использованием Differential Evolution.

**Результаты исследования.** В качестве основы выбрана одномерная пространственная модель Солоу–Свана с диффузией капитала. В соответствии с пространственными постановками модели динамика капитала может быть представлена уравнением реакции–диффузии, где диффузионный член отражает перемещение капитала из областей с большей его плотностью в области с меньшей плотностью [3–6]. Для численного эксперимента использована модель:

$$\frac{\partial k(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 k(x, t)}{\partial x^2} + sA k(x, t)^\alpha - \delta k(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

где  $k(x, t)$  — плотность физического капитала;  $D$  — коэффициент пространственной диффузии;  $s$  — доля сбережений;  $A$  — уровень технологии;  $\alpha$  — эластичность выпуска по капиталу;  $\delta$  — норма амортизации. При  $\alpha = 1/2$  производственная функция принимает стандартный вид  $f(k) = k^{1/2}$ . Именно такой вариант производственной функции и значения  $\mu = 0,05$ ,  $A = 1$ , а также несколько вариантов нормы сбережений использовались в опубликованном численном исследовании пространственной модели Солоу [6]. Поэтому в настоящем эксперименте параметры  $s = 0,25$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $A = 1$  и  $\delta = 0,05$  не являются произвольным набором, а соответствуют одному из опубликованных расчетных сценариев.

Для замыкания задачи использованы однородные условия Неймана

$$\frac{\partial k(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial k(L, t)}{\partial x} = 0,$$

которые интерпретируются как отсутствие чистого потока капитала через границы рассматриваемой пространственной экономики. Такой тип граничных условий используется в пространственных моделях экономического роста для замкнутой области [6]. Пространственная область нормирована:  $L = 1$ , а временной интервал расчета выбран  $0 \leq t \leq 2$ . Начальное распределение капитала задано кусочно-линейной функцией, использованной в одномерных численных экспериментах пространственной модели Солоу [6]:

$$\begin{aligned} k(x, 0) &= 5, \text{ если } 0 \leq x \leq 0,25; \\ k(x, 0) &= 40x - 5, \text{ если } 0,25 < x < 0,75; \\ k(x, 0) &= 25, \text{ если } 0,75 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Такое начальное условие создает выраженную пространственную неоднородность, поэтому влияние диффузионного механизма можно наблюдать уже на ранних этапах моделирования.

Обратная задача формулируется относительно двух параметров  $\theta = (D, \delta)$ . Эталонные значения  $D^* = 1$  и  $\delta^* = 0,05$  используются только для формирования контрольного численного эксперимента; они не интерпретируются как оценки конкретной страны. Такой подход позволяет проверить именно способность алгоритма восстанавливать заранее известные параметры по данным, и тем самым отделить качество метода идентификации от качества внешних экономических статистических данных. Остальные параметры модели фиксированы:  $s = 0,25$ ,  $A = 1$ ,  $\alpha = 0,5$ . Диапазоны поиска заданы как  $0,5 \leq D \leq 1,5$  и  $0,03 \leq \delta \leq 0,07$ .

Для построения наблюдаемых данных сначала решалась прямая задача при  $D^* = 1$  и  $\delta^* = 0,05$ . Пространственная область дискретизировалась на 41 узел. Вторую производную по пространственной координате аппроксимировали центральной разностью во внутренних узлах. Для граничных узлов использовалась аппроксимация, согласованная с условием Неймана. После пространственной дискретизации исходное уравнение сводилось к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Интегрирование по времени выполнялось в Python с использованием неявного метода BDF, что позволяет устойчиво работать с жесткими системами, возникающими после дискретизации диффузионного оператора.

Для имитации измерительной погрешности к эталонному решению добавлялся нормально распределенный шум с уровнем 0,5% от стандартного отклонения эталонного набора данных. Целевая функция определялась как средняя квадратичная ошибка между расчетным и наблюдаемым полями:

$$J(D, \delta) = \frac{1}{NM} \sum_i \sum_j [k(x_i, t_j; D, \delta) - k_{\text{obs}}(x_i, t_j)]^2 \rightarrow \min.$$

Таким образом, на каждой итерации Differential Evolution выбирает пару  $(D, \delta)$ , решает прямую задачу и оценивает соответствие полученного поля наблюдениям. Итерационный процесс продолжается до выполнения критерия остановки.

На рисунке 1 показана пространственно-временная эволюция эталонной плотности капитала. Начальное состояние характеризуется значительной неоднородностью: крайние части области имеют более высокий уровень капитала, а центральная часть начинается с меньших значений. Диффузионный член постепенно сглаживает различия между соседними участками. Уже к  $t \approx 0,5$  пространственный профиль становится близким к однородному, после чего динамика определяется преимущественно балансом накопления и амортизации. Такое поведение согласуется с общей интерпретацией пространственной диффузии в модели Солоу: различия в запасах капитала частично компенсируются перемещением капитала между территориями [3, 6].

По результатам основного запуска Differential Evolution получены оценки  $D = 1,00007$  и  $\delta = 0,049967$ . Средняя квадратичная ошибка между восстановленным решением и зашумленными наблюдениями составила 0,00980, тогда как ошибка относительно исходного эталонного решения — 0,000579. Относительная ошибка оценки коэффициента диффузии составила 0,0068%, а нормы амортизации — 0,0659%. Следовательно, даже при наличии шума алгоритм практически точно восстановил оба заданных параметра. Важно, что столь малая ошибка не должна интерпретироваться как эмпирическая точность оценки реальной экономики: она характеризует только устойчивость метода на контролируемом синтетическом эксперименте.

На рисунке 2 представлена динамика целевой функции по поколениям Differential Evolution. На первых поколениях наблюдается быстрое уменьшение ошибки, после чего процесс переходит к более медленной локальной стабилизации. К двадцатому поколению значение целевой функции достигает примерно  $9,39 \cdot 10^{-5}$ . Такая динамика соответствует назначению DE как популяционного метода глобального поиска: первоначально исследуется широкий диапазон параметров, затем популяция концентрируется в области наилучшего решения [9].

Дополнительная проверка выполнена с тремя независимыми начальными популяциями. Средние оценки составили  $D = 1,000228$  и  $\delta = 0,049966$ ; стандартные отклонения оценок равны

соответственно  $2,23 \cdot 10^{-5}$  и  $3,95 \cdot 10^{-8}$ . Это указывает на высокую воспроизводимость результата в рассматриваемой двумерной задаче поиска. На рисунке 3 показано сравнение эталонного решения, зашумленных наблюдений и восстановленного решения в момент времени  $t = 0,1$ . Восстановленная кривая практически совпадает с эталонной, а отклонения наблюдений объясняются введенным шумом.

Полученные результаты позволяют сделать два аналитических вывода. Во-первых, пространственная неоднородность существенно важна именно на начальной стадии: диффузионный механизм быстро сглаживает различия, после чего система приближается к пространственно однородному режиму. Во-вторых, параметры  $D$  и  $\delta$  имеют разные проявления в динамике, что делает их совместную идентификацию возможной при использовании нескольких временных срезов. Параметр  $D$  преимущественно влияет на скорость пространственного выравнивания, тогда как  $\delta$  определяет скорость потери накопленного капитала. Использование всего пространственно-временного поля, а не одного конечного значения, поэтому повышает информативность обратной задачи.

**Таблица 1 — Параметры численного эксперимента**

| Параметр                 | Обозначение   | Значение | Интерпретация                          |
|--------------------------|---------------|----------|----------------------------------------|
| Коэффициент диффузии     | $D$           | 1,0      | Эталонное значение; восстанавливается  |
| Норма амортизации        | $\delta$      | 0,05     | Эталонное значение; восстанавливается  |
| Норма сбережений         | $s$           | 0,25     | Фиксированный параметр                 |
| Эластичность по капиталу | $\alpha$      | 0,5      | Производственная функция Кобба–Дугласа |
| Технологический уровень  | $A$           | 1,0      | Нормированный уровень                  |
| Длина области            | $L$           | 1,0      | Нормированная пространственная область |
| Уровень шума             | $\varepsilon$ | 0,5%     | Синтетическая погрешность наблюдений   |

**Таблица 2 — Результаты идентификации параметров**

| Параметр | Эталон  | Оценка DE | Абсолютная ошибка | Относительная ошибка |
|----------|---------|-----------|-------------------|----------------------|
| $D$      | 1.00000 | 1.00007   | 0.000068          | 0.0068%              |
| $\delta$ | 0.05000 | 0.04997   | 0.000033          | 0.0659%              |

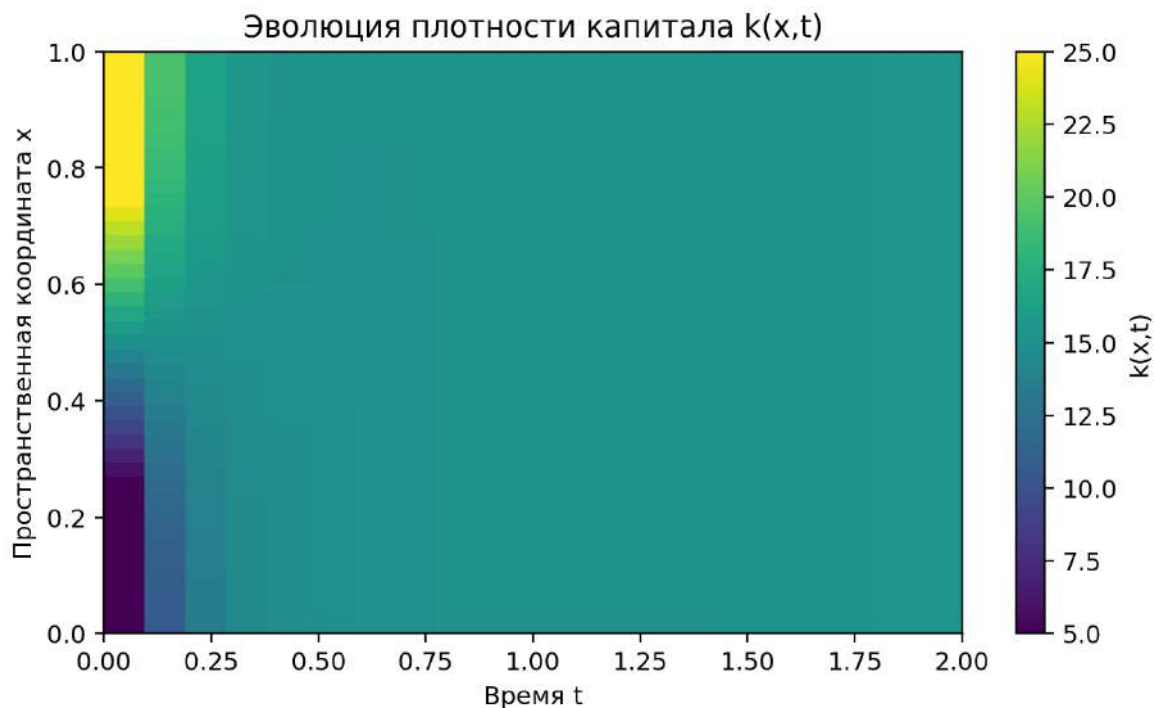


Рисунок 1 — Пространственно-временная динамика плотности капитала  $k(x,t)$ .

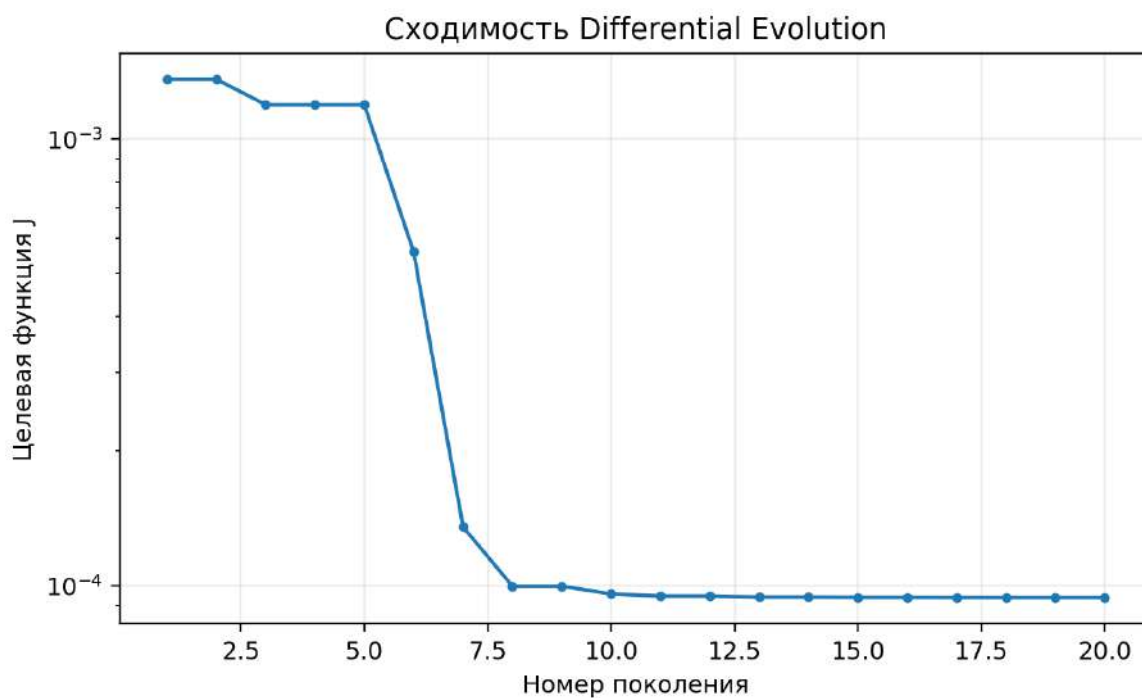


Рисунок 2 — Сходимость целевой функции алгоритма Differential Evolution.

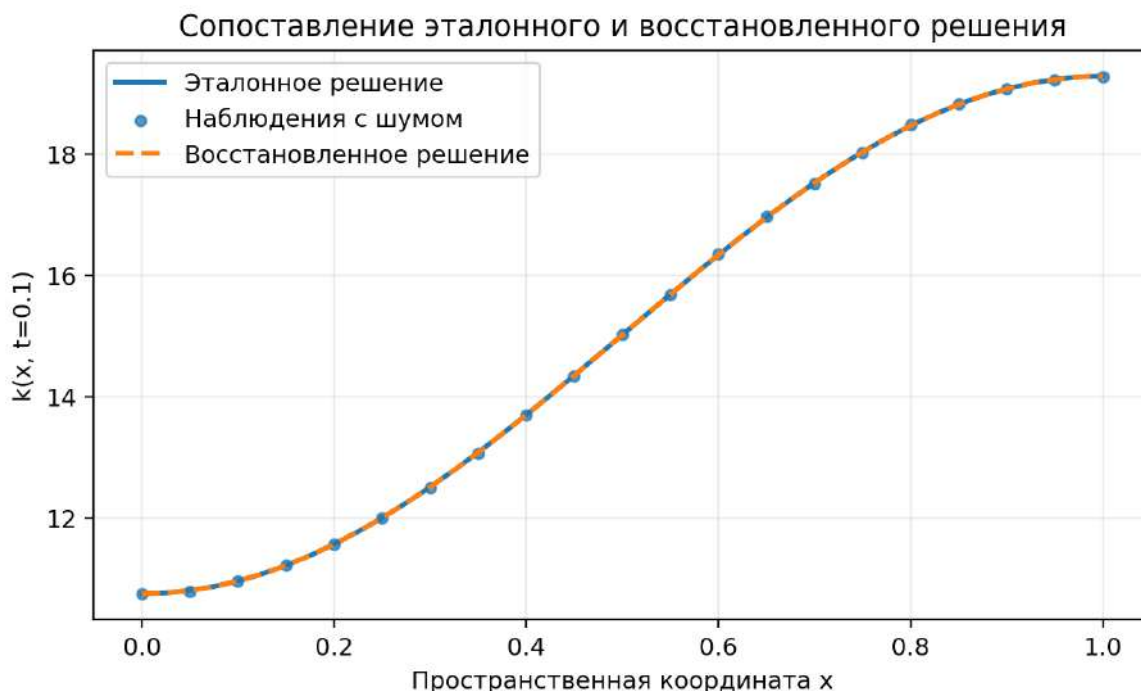


Рисунок 3 — Эталонное, зашумленное и восстановленное пространственное распределение капитала при  $t = 0,1$ .

В количественном выражении основной запуск дал  $D = 1.000068$  и  $\delta = 0.04996707$ . Целевая функция в оптимуме составила  $9.389\text{e-}05$ . Среднеквадратичная ошибка относительно зашумленных наблюдений равна  $0.009795$ , а относительно эталонного решения —  $0.000579$ .

В трех дополнительных запусках средняя оценка составила  $D = 1.000228$  и  $\delta = 0.04996602$ ; стандартные отклонения составили  $2.23\text{e-}05$  и  $3.95\text{e-}08$ . Это показывает, что найденный минимум практически не зависит от случайной инициализации популяции в пределах проведенного эксперимента.

Следовательно, основная гипотеза исследования получила численное подтверждение: пространственно-временная информация о капитале содержит достаточную информацию для восстановления двух рассматриваемых параметров в выбранной модели, а Differential Evolution способен найти их без использования градиента.

**Выводы.** В работе рассмотрена обратная задача для одномерной пространственной модели Солоу с диффузией физического капитала. В качестве математической основы использовано параболическое уравнение реакции–диффузии с производственной функцией Кобба–Дугласа. Параметры основного численного сценария согласованы с опубликованными исследованиями пространственной модели Солоу, что позволяет рассматривать эксперимент как воспроизводимый расчетный тест, а не как произвольную демонстрацию алгоритма [6].

Для решения обратной задачи применен алгоритм Differential Evolution. Численный эксперимент показал, что при 0,5%-ном случайном шуме коэффициент пространственной диффузии и норма амортизации восстанавливаются с относительными ошибками менее 0,1%. Повторные запуски показали близкие результаты, что свидетельствует о стабильности алгоритма в рассматриваемой постановке. Основным преимуществом выбранного подхода является отсутствие необходимости вычислять градиент целевой функции, что удобно при многократном решении нелинейной параболической задачи [9].

Ограничением исследования является использование синтетических наблюдений и нормированной пространственной области. Поэтому полученные значения  $D$  и  $\delta$  не следует трактовать как оценки параметров конкретной страны или региона. Следующим этапом исследования может стать применение метода к реальным региональным данным о капитале и выпуске, а также расширение вектора неизвестных параметров за счет коэффициента

сбережений, технологического уровня и параметров производственной функции. В таком случае целесообразно дополнительно исследовать идентифицируемость параметров и влияние уровня и структуры шума на качество восстановления.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Солоу Р. М. A contribution to the theory of economic growth // The Quarterly Journal of Economics. – 1956. – Vol. 70, No. 1. – P. 65–94. – DOI: 10.2307/1884513.
2. Swan T. W. Economic growth and capital accumulation // The Economic Record. – 1956. – Vol. 32, No. 2. – P. 334–361. – DOI: 10.1111/j.1475-4932.1956.tb00434.x.
3. Camacho C., Zou B. The spatial Solow model // Economics Bulletin. – 2004. – Vol. 18, No. 2. – P. 1–11.
4. Capasso V., Engbers R., La Torre D. On a spatial Solow model with technological diffusion and nonconcave production function // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2010. – Vol. 11, No. 5. – P. 3858–3876. – DOI: 10.1016/j.nonrwa.2010.01.016.
5. Ureña N., Vargas A. M. On the numerical solution to a Solow model with spatial diffusion and technology-induced capital mobility // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2023. – Vol. 157. – P. 541–552. – DOI: 10.1016/jenganabound.2023.09.026.
6. Ureña N., Vargas A. M. Numerical solution to a Parabolic-ODE Solow model with spatial diffusion and technology-induced motility // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2024. – Vol. 447. – Art. 115913. – DOI: 10.1016/j.cam.2024.115913.
7. Engbers R., Burger M., Capasso V. Inverse problems in geographical economics: parameter identification in the spatial Solow model // Philosophical Transactions of the Royal Society A. – 2014. – Vol. 372, No. 2028. – Art. 20130402. – DOI: 10.1098/rsta.2013.0402.
8. Pan Y., Wang Q., Zhang L. Identification of nonconcave aggregate production functions in spatial Solow models with technology diffusion // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 2026. – Vol. 86, No. 1. – P. 232–259. – DOI: 10.1137/24M1700570.
9. Storn R., Price K. Differential Evolution — A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces // Journal of Global Optimization. – 1997. – Vol. 11, No. 4. – P. 341–359. – DOI: 10.1023/A:1008202821328.
10. Mankiw N. G., Romer D., Weil D. N. A contribution to the empirics of economic growth // The Quarterly Journal of Economics. – 1992. – Vol. 107, No. 2. – P. 407–437. – DOI: 10.2307/2118477.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.22792058>

## REGULARIZATION METHODS FOR LINEAR MACHINE LEARNING PROBLEMS

ABETAI AIZHAN AGABEKKYZY

Second-year Master's student, Department of Mathematics and Mathematical Modeling,  
Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

**Abstract.** *This article considers regularization methods for linear machine learning problems. Training a linear model can be represented as a system of linear algebraic equations in which the unknown variables are model weights. In practice, such a system may be ill-conditioned, underdetermined, or sensitive to errors in training data. Direct computation may therefore produce an unstable model with poor predictive performance. The relationship between linear learning, inverse problems, and systems of equations is examined. Particular attention is paid to Tikhonov regularization, L1 regularization, singular value decomposition, and iterative regularization. These approaches improve solution stability and reduce overfitting. Regularization is shown to be both a computational technique and a mathematical means of controlling model complexity and generalization.*

**Keywords:** *machine learning, linear model, regularization, ill-posed problem, Tikhonov regularization, singular value decomposition, overfitting.*

### 1. Introduction

Machine learning constructs mathematical models from data. Instead of describing every rule explicitly, an algorithm identifies relationships between input and output variables by analysing training examples. Linear models are among the simplest and most interpretable approaches and are widely used in regression, classification, forecasting, signal processing, and data analysis.

A linear model transforms an input vector  $g$  into an output vector  $h$  using a weight matrix  $Q$ :

$$Qg = h.$$

Suppose that a training dataset contains  $K$  input-output pairs  $\{(g^{(1)}, h^{(1)}), \dots, (g^{(K)}, h^{(K)})\}$ . The aim of training is to determine a matrix  $Q$  that gives outputs close to the correct values for both training and previously unseen data. Combining the input vectors into  $G$  and the outputs into  $H$  gives

$$QG = H.$$

Training can therefore be reduced to a matrix equation or a system of linear algebraic equations. This connection allows classical numerical analysis and the theory of inverse and ill-posed problems to be applied to machine learning. Direct solution is not always reliable:  $G$  may be rectangular, singular, or ill-conditioned, while the observations may contain noise or missing information. Small data perturbations can then cause large changes in the calculated weights. Regularization is needed to obtain a stable and useful model.

### 2. Linear Machine Learning as an Inverse Problem

Let  $G = [g^{(1)}, \dots, g^{(K)}]$  be the input matrix and  $H = [h^{(1)}, \dots, h^{(K)}]$  the corresponding output matrix. If  $G$  is square and nonsingular, the formal solution is  $Q = HG^{-1}$ . Real datasets, however, rarely produce a perfectly invertible, well-conditioned matrix. When  $G$  is singular or rectangular, an exact inverse does not exist and a least-squares solution may be obtained with the Moore-Penrose pseudoinverse:

$$Q = HG^+.$$

Even this solution may be unstable when  $G$  has very small singular values. For the singular value decomposition  $G = U\Sigma V^T$ , the pseudoinverse contains reciprocal values  $1/\sigma_i$ . A small  $\sigma_i$  produces a large reciprocal and amplifies even a minor error in the training data. The resulting model may fit random fluctuations rather than the general relationship between variables. In machine learning this is overfitting; in inverse-problem theory it is instability with respect to perturbations in the initial data.

### 3. Regularization Methods

Regularization replaces an unstable problem with a nearby stable one by imposing an additional condition on the parameters. This condition restricts excessively large or unnecessarily complex solutions.

Tikhonov regularization, also called L2 regularization in machine learning, minimizes the functional

$$J\alpha(Q) = \|QG - H\|^2 F + \alpha \|Q\|^2 F, \quad \alpha > 0,$$

where the first term measures the difference between predicted and correct outputs and the second penalizes large weights. A common form of the regularized solution is

$$Q\alpha = HG^T(GG^T + \alpha I)^{-1},$$

when the dimensions are compatible. Adding  $\alpha I$  improves conditioning and limits the influence of small singular values. The parameter  $\alpha$  balances data fitting and stability. If  $\alpha$  is too small, the solution remains sensitive to noise; if it is too large, the model is oversimplified and underfits. Cross-validation, the discrepancy principle, and the L-curve can be used to select  $\alpha$ .

L1 regularization uses the objective

$$J\lambda(Q) = \|QG - H\|^2 F + \lambda \|Q\|_1.$$

Unlike L2 regularization, the L1 penalty can force some coefficients to become exactly zero. It is useful when only a small number of input variables are expected to be important and therefore performs regularization and feature selection simultaneously.

Truncated singular value decomposition retains only singular values above a chosen threshold. Components associated with very small singular values are removed because they are most sensitive to errors. The approximation is based on

$$G^+r = Vr\Sigma^{-1}rU^Tr,$$

where  $r$  is the number of retained components. This reduces noise amplification and may also lower computational complexity. Unlike a purely algebraic inversion, truncated SVD makes the stability-rank relationship explicit and helps identify directions in the parameter space that cannot be reliably recovered from the available data.

Iterative algorithms, including gradient descent, can also provide regularization. If an iterative process is stopped before full convergence, unstable high-frequency or small-singular-value components often do not have enough time to dominate the result. Early stopping thus prevents the model from fitting noise, and the number of iterations plays a role similar to a regularization parameter.

### 4. Regularization and Model Generalization

The purpose of machine learning is not merely to minimize training error. A useful model must predict new observations accurately. An unregularized model can achieve a very small training error but a much larger test error. Regularization restricts the set of possible solutions: L2 favours small, smoothly distributed coefficients; L1 favours sparse coefficients; truncated SVD suppresses unstable data directions; and early stopping controls the effective complexity of an iterative solution.

Regularization introduces bias because the regularized result differs from the exact solution of the original system. This bias is accepted in exchange for lower variance and reduced sensitivity to noise. The best method depends on the structure of the problem. L2 is suitable when many predictors may contribute, L1 when sparsity is expected, SVD when rank and stability must be examined, and iterative regularization for large systems where direct inversion is expensive.

### 5. Practical Interpretation

From a mathematical viewpoint, regularization adds information that is absent from the data alone. A penalty on the norm states that smaller coefficients are preferable; an L1 penalty states that a sparse explanation is preferable; truncation states that directions unsupported by reliable singular components should be ignored. These assumptions must be chosen according to the application rather than applied mechanically.

A practical workflow begins with scaling the variables and splitting the data into training and validation subsets. The condition number or singular-value spectrum of the design matrix should then

be examined. Candidate regularization methods and parameter values are compared on the validation data. The final model is retrained with the selected setting and evaluated on an independent test subset. This procedure separates parameter estimation from the assessment of generalization and reduces optimistic conclusions based only on training error.

Regularization is especially important when the number of predictors is comparable to or greater than the number of observations. In such situations, many weight vectors can explain the training set almost equally well. The penalty or truncation rule selects one solution according to a transparent mathematical criterion. Thus, regularization improves not only numerical stability but also reproducibility and, in the case of sparse models, interpretability.

## **6. Conclusion**

Training a linear machine learning model can be formulated as a system of linear algebraic equations, establishing a direct connection between machine learning and the theory of inverse and ill-posed problems. When the training matrix is singular, ill-conditioned, or affected by noise, direct methods may produce unstable weights and lead to overfitting.

Tikhonov and L1 regularization, truncated singular value decomposition, and iterative regularization stabilize the learning process. They reduce the influence of noisy components, control model complexity, and improve predictions for unseen data. Regularization should therefore be treated as an essential part of linear machine learning. Its correct use produces solutions that are mathematically stable, computationally reliable, and appropriate for practical data analysis.

## **REFERENCES**

1. Tikhonov, A. N., & Arsenin, V. Y. (1977). *Solutions of Ill-Posed Problems*. Washington, DC: Winston & Sons.
2. Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016). *Deep Learning*. Cambridge, MA: MIT Press.
3. Saad, Y., & Van der Vorst, H. A. (2000). Iterative solution of linear systems in the 20th century. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 123(1-2), 1-33.
4. Bottou, L. (2012). Stochastic gradient descent tricks. In *Neural Networks: Tricks of the Trade* (pp. 421-436). Springer.
5. Kabanikhin, S. I. (2021). Inverse problems and artificial intelligence. *Russian Journal of Cybernetics*, 2(3), 33-43.
6. Liu, S., Kabanikhin, S. I., & Strijhak, S. V. (2024). Regularization of Linear Machine Learning Problems. Unpublished manuscript supplied for review.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.22792146>

## ЖАРАТЫЛЫСТАНУ-МАТЕМАТИКА БАҒЫТЫНДАҒЫ 10-СЫНЫПТА «ЖЫЛУ ФИЗИКАСЫ» БӨЛІМІН ОҚЫТУДА FLIPPED CLASSROOM ТӘСІЛІН ҚОЛДАНУ

АЛЬЖАНОВА БАЛНҰР

Ө. Жәнібеков атындағы ОҚПУ, Шымкент, Қазақстан

**Аннотация:** Мақалада жаратылыстану-математика бағытындағы 10-сыныпта «Жылу физикасы» бөлімін оқытуда Flipped Classroom тәсілін қолданудың ғылыми-әдістемелік негіздері қарастырылады. Зерттеу мақсаты - аталған бөлімді оқытуда төңкерілген сынып моделінің дидактикалық мүмкіндіктерін айқындау, оны іске асырудың кезеңдерін сипаттау және мектеп тәжірибесіне бейімделген әдістемелік үлгі ұсыну. Ғылыми әдебиеттерді талдау flipped classroom тәсілінің жаратылыстану пәндерінде оқу жетістігін, оқу мотивациясын, белсенділікті және өзіндік жұмысты арттыруға ықпал ететінін көрсетті. Зерттеу нәтижесінде «Жылу физикасы» бөлімінің мазмұнына сәйкес сабаққа дейінгі, сабақ үстіндегі және сабақтан кейінгі әрекеттерді қамтитын құрылымдық модель ұсынылды. Мақала қорытындысында flipped classroom тәсілін тиімді қолдану үшін қысқа цифрлық контент, формативті бағалау, сараланған тапсырмалар және мұғалімнің тұрақты педагогикалық қолдауы қажет екені негізделеді

**Кілт сөздер:** flipped classroom, физиканы оқыту, жылу физикасы, 10-сынып, белсенді оқыту, цифрлық білім беру ресурстары.

### Кіріспе

Қазіргі білім беру жүйесінде оқушының пәндік білімді меңгеруімен қатар, өздігінен білім алу, сыни ойлау, мәселелерді шешу және оқу әрекетін реттеу дағдыларын қалыптастыру алдыңғы қатарға шықты. Бұл міндеттер жаратылыстану пәндерінде, соның ішінде физикада ерекше мәнге ие, өйткені физикалық ұғымдар мен заңдылықтарды түсіну тек теориялық мазмұнды қабылдаумен емес, оны есеп шығару, тәжірибе жасау, салыстыру және түсіндіру арқылы игерумен байланысты [1].

10-сыныптағы «Жылу физикасы» бөлімі физика курсының маңызды тарауларының бірі болып саналады. Оның мазмұнына ішкі энергия, жылу мөлшері, меншікті жылу сыйымдылығы, фазалық ауысулар, термодинамика элементтері және жылу процестерінің заңдылықтары енеді. Бұл тақырыптарды оқыту барысында оқушылар жиі формулаларды механикалық түрде жаттап, олардың физикалық мағынасын, құбылыстар арасындағы байланысты және теорияны практикалық жағдайларға қолдану жолдарын толық түсіне алмайды. Сондықтан дәстүрлі түсіндіру үлгісін толықтыратын, білім алушының белсенді әрекетін күшейтетін әдістерді іздеу өзекті болып отыр [2].

Осындай тиімді тәсілдердің бірі - Flipped Classroom немесе төңкерілген сынып моделі. Бұл тәсілде жаңа теориялық материал сабаққа дейін игеріледі, ал сабақтағы уақыт есеп шығаруға, проблемалық сұрақтарды талдауға, зертханалық және тәжірибелік тапсырмалар орындауға бағытталады [2]. Ғылыми деректер flipped classroom тәсілінің жаратылыстану және математика сабақтарында оң нәтиже бере алатынын, алайда оның тиімділігі мұғалімнің оқу процесін дұрыс жобалауына тәуелді екенін көрсетеді [1]. Осыған байланысты зерттеу тақырыбының өзектілігі 10-сыныптағы «Жылу физикасы» бөлімін оқытуда flipped classroom тәсілін ғылыми тұрғыда негіздеп, мектеп тәжірибесіне бейімделген әдістемелік үлгі ұсыну қажеттілігімен анықталады.

Зерттеу мақсаты - жаратылыстану-математика бағытындағы 10-сыныпта «Жылу физикасы» бөлімін оқытуда Flipped Classroom тәсілін қолданудың ғылыми-әдістемелік негіздерін айқындау және оны жүзеге асырудың тиімді моделін ұсыну.

Зерттеу міндеттері:

- flipped classroom тәсілінің теориялық негіздерін талдау;

ОФ “Международный научно-исследовательский центр “Endless Light in Science”

- «Жылу физикасы» бөлімінің мазмұндық ерекшеліктерін анықтау;
- төңкерілген сынып моделін сабақ құрылымына бейімдеу жолдарын сипаттау;
- тәсілдің артықшылықтары мен шектеулерін бағалау;
- мектеп практикасына арналған әдістемелік ұсыныстар әзірлеу.

### Әдіснама

Зерттеуде теориялық талдау әдісі қолданылды. Зерттеу материалы ретінде flipped classroom және science education саласына қатысты ғылыми жарияланымдар, жүйелі шолулар және thermal physics classroom туралы еңбектер алынды [1][2]. Әдебиеттерді іріктеу барысында тақырыптың өзектілігі, ғылыми жарияланымның сенімділігі және мектептегі физика сабағына бейімдеу мүмкіндігі ескерілді [1].

Әдіснамалық негіз ретінде педагогикалық модельдеу және салыстырмалы-талдамалық сипаттама қолданылды. Алдымен flipped classroom тәсілінің ғылыми анықтамалары, құрылымдық ерекшеліктері және тиімділік факторлары қарастырылды, содан кейін олар 10-сыныптағы «Жылу физикасы» бөлімінің мазмұнымен сәйкестендірілді. Соның негізінде сабаққа дейінгі, сабақ үстіндегі және сабақтан кейінгі кезеңдерден тұратын әдістемелік модель құрылды [2].

Зерттеу логикасы үш бағытта ұйымдастырылды. Бірінші бағыт - flipped classroom тәсілінің жалпы дидактикалық сипаттамасын анықтау. Екінші бағыт - «Жылу физикасы» бөлімінің оқу мазмұнына сәйкес келетін оқу әрекеттерін іріктеу. Үшінші бағыт - мектеп жағдайында қолдануға болатын нақты ұсыныстар жүйесін әзірлеу. Мұндай құрылым зерттеу нысанын тұтас қарастыруға және практикалық маңызы бар қорытындылар жасауға мүмкіндік берді.

Flipped Classroom - білім алушы жаңа тақырыптың бастапқы мазмұнымен сабаққа дейін танысып, ал сыныпта сол білімді қолдануға, талдауға және тереңдетуге бағытталған оқыту моделі. Бұл тәсілде бейнесабақтар, презентациялар, қысқа мәтіндер, интерактивті тапсырмалар және цифрлық тесттер кеңінен қолданылады. Мұндай тәсіл оқу уақытының құрылымын өзгертеді: бұрын сабақта орындалатын түсіндіру жұмысы үйге ауысады, ал сабақта оқушының белсенді танымдық әрекеті күшейеді [4].

Flipped classroom тәсілі оқушының өзіндік жұмысын, оқу жауапкершілігін және сабақтағы қатысуын арттыруға мүмкіндік береді. Сонымен қатар мұғалімге оқушылардың алдын ала дайындығын көріп, сыныптағы жұмысты саралап ұйымдастыруға жол ашады. Дегенмен бұл тәсілдің тиімділігі сабаққа дейінгі материалдың сапасына, қолжетімділігіне және оның сабақтағы тапсырмалармен тікелей байланысына тәуелді [3].

«Жылу физикасы» бөлімі - теориялық ұғымдар мен есептік амалдар тығыз байланысқан тарау. Мұнда температура, ішкі энергия, жылу мөлшері, жылу алмасу, жылу сыйымдылығы, балку, булану және термодинамика заңдылықтары қарастырылады. Бұл тақырыптарды игеру үшін оқушы тек анықтамаларды білуімен шектелмей, құбылыстарды молекулалық деңгейде елестете алуы, графиктермен жұмыс істей алуы және формулаларды нақты жағдаяттарға қолдануы қажет [3].

Осы бөлімді оқытуда flipped classroom тәсілі ерекше тиімді болуы мүмкін, себебі теориялық түсіндіруді алдын ала игеріп келген оқушы сабақта есептер шығаруға, талдауға және сұрақ қоюға көбірек уақыт алады. Әсіресе меншікті жылу сыйымдылығы, фазалық ауысулар, жылу тепе-теңдігі сияқты тақырыптарда көрнекі видео, анимация және қысқа алдын ала тапсырмалар маңызды рөл атқарады.

10-сыныптағы «Жылу физикасы» бөлімін flipped classroom негізінде оқыту үш кезеңге бөлінеді.

1. Сабаққа дейінгі кезең. Оқушыларға 8–12 минуттық бейнематериал, қысқаша теориялық конспект және 4–5 тексеру сұрағы ұсынылады. Бұл кезеңнің мақсаты - жаңа ұғымдармен алдын ала таныстыру және оқушылардың бастапқы түсінігін қалыптастыру.

2. Сабақ үстіндегі кезең. Мұғалім қысқа диагностикалық сұрақтар арқылы түсінбеушіліктерді анықтап, кейін есеп шығару, тәжірибелік тапсырмалар, график талдау, жұптық және топтық талқылау ұйымдастырады. Бұл кезеңде оқушының белсенді әрекеті басым болады, ал мұғалім бағыттаушы және кеңесші рөлін атқарады.

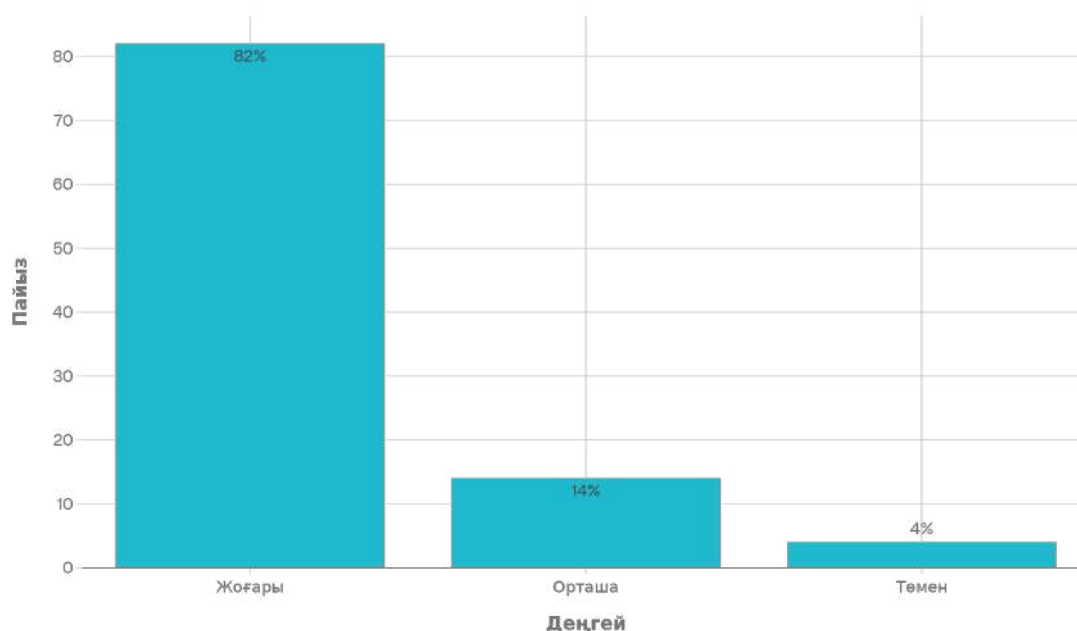
3. Сабақтан кейінгі кезең. Бекітуге арналған шағын тест, рефлексия, қателерді талдау немесе білімді жаңа жағдаятта қолдануға бағытталған үй тапсырмасы беріледі. Мұндай құрылым оқу нәтижесін тұрақтандыруға және өзіндік реттеуді қалыптастыруға ықпал етеді.

Мысалы, «Жылу мөлшері. Меншікті жылу сыйымдылығы» тақырыбында сабаққа дейін оқушылар формуланың құрылымы мен физикалық мағынасын түсіндіретін қысқа видео көреді және бірнеше қарапайым сұраққа жауап береді. Сабақта олар әртүрлі деңгейдегі есептер шығарып, түрлі заттардың қызу ерекшеліктерін салыстырады және нақты тұрмыстық мысалдар арқылы материалдардың қасиеттерін талдайды.

«Фазалық ауысулар» тақырыбында алдын ала берілген бейнематериал арқылы оқушылар балқу және қайнау процестерінің ерекшелігін бақылайды. Сабақ барысында олар температура графигін түсіндіреді, фазалық ауысу кезіндегі энергия өзгерісін сипаттайды және формула мен құбылыс арасындағы байланысты анықтайды. Осындай жұмыс үлгілері теорияны тереңірек түсінуге мүмкіндік береді.

### Нәтижелер және талқылау

Ғылыми деректерді талдау flipped classroom тәсілінің жаратылыстану және математика сабақтарында оқу нәтижесіне жалпы оң әсер беретінін көрсетті. Бұл тәсіл оқушылардың белсенділігін күшейтеді, сабақтағы уақытты тиімді пайдалануға мүмкіндік береді және мұғалімнің жеке қолдау көрсету мүмкіндігін арттырады]. «Жылу физикасы» бөлімінің мазмұндық ерекшелігі flipped classroom моделіне сәйкес келеді, өйткені бұл тарауда ұғымдарды алдын ала игеру мен сабақтағы қолдану әрекеттерінің арақатынасы айқын көрінеді.



Сурет 1 - Академиялық нәтижелер деңгейі

Диаграмма flipped classroom қолданылған жағдайда академиялық нәтижелердің деңгейлік үлесін көрсетеді: жоғары -82%, орташа -14%, төмен -4%. Бұл оқыту тәсілі жағдайында нәтижелердің басым бөлігі жоғары деңгейде шоғырланғанын визуалды түрде түсіндіреді.

Сонымен қатар талдау нәтижесі flipped classroom тәсілінің шектеулерін де көрсетті. Егер оқушы сабаққа дейінгі материалды қарамаса, сыныптағы белсенді тапсырмалардың тиімділігі төмендейді. Сол себепті формативті бағалау, қысқа тексеру сұрақтары және қолжетімді цифрлық материалдар міндетті элементтер болуы тиіс. Тағы бір маңызды мәселе - мұғалімнің уақыт шығыны. Сапалы бейнесабак, инфографика немесе тест дайындау қосымша әдістемелік дайындықты қажет етеді.

Талқылау нәтижесінде flipped classroom тәсілі 10-сыныпта толықтай немесе ішінара форматта қолданылуы мүмкін деген қорытынды жасалды. Күрделі тақырыптарда аралас модель тиімдірек болуы ықтимал: бір бөлігі алдын ала игеріліп, күрделі тұстары сабақта мұғалімнің тікелей түсіндіруімен бекітіледі. Демек, бұл тәсіл әмбебап шаблон емес, мазмұнға бейімделетін икемді педагогикалық модель ретінде қарастырылуы тиіс.

#### **Қорытынды**

Қорыта айтқанда, жаратылыстану-математика бағытындағы 10-сыныпта «Жылу физикасы» бөлімін оқытуда Flipped Classroom тәсілін қолдану оқытудың тиімділігін арттыруға мүмкіндік береді. Бұл тәсіл оқушылардың алдын ала дайындалуына, сабақ уақытын есеп шығару мен тәжірибелік әрекетке бағыттауға, сондай-ақ теориялық білімді практикамен байланыстыруға жағдай жасайды.

Зерттеу нәтижелері flipped classroom моделін тиімді енгізу үшін бірнеше шарттың маңызды екенін көрсетті: қысқа әрі мазмұнды цифрлық материалдар дайындау, жүйелі формативті бағалау жүргізу, оқушылардың дайындық деңгейін ескере отырып сараланған тапсырмалар ұсыну және мұғалімнің тұрақты педагогикалық қолдауын қамтамасыз ету. Осы талаптар орындалған жағдайда flipped classroom тәсілі мектеп физикасын оқытуда, әсіресе «Жылу физикасы» бөлімінде, білім алушыға бағытталған тиімді әдістемелік құрал бола алады.

#### **ПАЙДАЛАНҒАН ӘДЕБИЕТТЕР:**

1. Wright G. W. The effects of flipped classrooms on K-16 students' science and math achievement: a systematic review // Studies in Science Education. 2022. DOI: <https://doi.org/10.1080/03057267.2021.1933354>
2. Hung H. C., Young S. C. Unbundling teaching and learning in a flipped thermal physics classroom in higher education powered by emerging innovative technology // Australasian Journal of Educational Technology. 2021. Vol. 37. No. 4. P. 89–99. DOI: <https://doi.org/10.14742/ajet.6059>
3. Comez G., Ozkan G. Review of Studies on the Use of the Flipped Learning Model in Science Education // ERIC. 2025. URL: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1461874.pdf>
4. Материалы городской научно-практической конференции педагогов и молодых ученых. Астана, 2025. URL: <https://astana-modern.edu.kz/wp-content/uploads/2026/01/sbornik-gorodskoj-npk-28.01.2025-1.pdf>

<https://doi.org/10.5281/zenodo.22792195>

ЭОЖ 378.016:510.6

## ДИСКРЕТТИ МАТЕМАТИКАДА ЖЕГАЛКИН КӨПМҮШЕЛІГІН МЕҢГЕРТУДІҢ САЛЫСТЫРМАЛЫ ТӘСІЛДЕРІ

БАҚТЫГЕРЕЕВА НҮРСИПАТ РИШАТҚЫЗЫ

Х. Досмұхамедов атындағы Атырау университетінің магистранты  
Атырау, Қазақстан

**Аңдатпа.** Мақалада болашақ математика мұғалімдеріне дискретті математика курсына Буль функцияларын Жегалкин көпмүшелігіне келтіруді меңгертудің салыстырмалы тәсілдері ғылыми-әдістемелік тұрғыдан негізделеді. Зерттеудің мақсаты – эквивалентті түрлендіру, анықталмаған коэффициенттер, Паскаль үшбұрышы және жылдам Мёбиус түрлендіруі тәсілдерінің математикалық негізін, орындалу логикасын және дидактикалық мүмкіндіктерін салыстырып, оларды бірізді оқыту моделін ұсыну. Әдіснама теориялық талдау, алгоритмдерді операциялық және дидактикалық критерийлер бойынша салыстыру, бір Буль функциясын бірнеше тәсілмен шешу және нәтижелерді өзара тексеру амалдарына сүйенеді. Талдау қолмен есептеуде үш айнымалы функциялар үшін эквивалентті түрлендіру мен Паскаль үшбұрышы көрнекі екенін, ал айнымалылар саны артқанда ақиқаттық кестеге негізделген жылдам Мёбиус түрлендіруі жүйелілік пен бағдарламалауға бейімділігі жағынан басым түсетінін көрсетті. Ұсынылған салыстырмалы оқыту циклі студенттің тек алгоритмді орындауын емес, есептің берілу формасына сәйкес әдіс таңдауын, алынған нәтижені негіздеуін және ықтимал қателерді диагностикалау қабілетін қалыптастыруға бағытталған.

**Түйін сөздер:** дискретті математика, Буль функциясы, Жегалкин көпмүшелігі, алгебралық қалыпты форма, Мёбиус түрлендіруі, Паскаль үшбұрышы, алгоритм, салыстырмалы оқыту.

## СРАВНИТЕЛЬНЫЕ ПОДХОДЫ К ОСВОЕНИЮ ПОЛИНОМА ЖЕГАЛКИНА В ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

**Аннотация.** В статье научно-методически обосновано сравнительное обучение будущих учителей математики способам преобразования булевых функций в полином Жегалкина. Сопоставлены эквивалентные преобразования, метод неопределённых коэффициентов, треугольник Паскаля и быстрое преобразование Мёбиуса. Предложен шестиступенчатый цикл обучения, ориентированный на осознанный выбор алгоритма, проверку результата и диагностику ошибок.

**Ключевые слова:** булева функция, полином Жегалкина, алгебраическая нормальная форма, преобразование Мёбиуса, сравнительное обучение.

## COMPARATIVE APPROACHES TO LEARNING THE ZHEGALKIN POLYNOMIAL IN DISCRETE MATHEMATICS

**Abstract.** The article provides a methodological rationale for comparative teaching of techniques for converting Boolean functions into the Zhegalkin polynomial to prospective mathematics teachers. Equivalent transformations, the undetermined-coefficients method, Pascal's triangle, and the fast

Möbius transform are compared. A six-stage instructional cycle is proposed to develop informed algorithm selection, result verification, and error diagnosis.

**Keywords:** Boolean function, Zhegalkin polynomial, algebraic normal form, Möbius transform, comparative teaching.

## КІРІСПЕ

Қазіргі мұғалімнің математикалық даярлығы дайын ережелерді қолданумен шектелмеуі тиіс: ол математикалық нысанды әртүрлі формада бейнелеп, балама шешу алгоритмдерін салыстырып, нақты жағдай үшін тиімдісін дәлелді таңдауы қажет. Дискретті математика осындай әрекетті дамытуға қолайлы сала, өйткені оның есептері алгоритмдік, индуктивтік және дәлелдеушілік ойлауды табиғи түрде ұштастырады. Х. Colipan мен А. Liendo дискретті математика есептері білім алушыларды сұрақ қою, дербес жағдайларды зерттеу, болжам ұсыну және оны дәлелдеу әрекеттеріне енгізетінін көрсетеді [1]. G. Greefrath және әріптестері де дискретті модельдердің пайымдау, коммуникация, мәселе шешу және модельдеу құзыреттерін дамыту әлеуетін атап өтеді [2].

Осы тұрғыдан Буль функциясын Жегалкин көпмүшелігіне келтіру тақырыбының маңызы ерекше. Алгебралық қалыпты форма (Algebraic Normal Form, ANF) Буль функциясын  $GF(2)$  өрісіндегі көпмүшелік арқылы бірімді өрнектейді; бұл формада қосу амалы XOR операциясына, ал көбейту конъюнкцияға сәйкес келеді. М. Barbier, Н. Cheballah және J.-M. Le Bars Мёбиус түрлендіруін ақиқаттық кесте мен ANF арасындағы негізгі өзара түрлендіру деп сипаттайды [3]. R. O'Donnell Буль функцияларын талдаудың комбинаторика, криптография, схемалар күрделілігі және теориялық информатикамен байланысын жүйелейді [4].

Оқыту тәжірибесінде бір функцияны Жегалкин көпмүшелігіне келтіру көбіне жалғыз алгоритммен түсіндіріледі. Мұндай тәсіл процедуралық дағдыны қалыптастырғанымен, әдістің неге жұмыс істейтінін, қай жағдайда тиімді екенін және басқа алгоритмдермен байланысын толық ашпайды. Сондықтан зерттеу мәселесі мынадай сұрақпен айқындалады: болашақ математика мұғалімдеріне Жегалкин көпмүшелігін меңгертуде математикалық дұрыстықты, алгоритмдік тиімділікті және пәндік-әдістемелік рефлексияны бір мезгілде қамтамасыз ететін салыстырмалы тәсілді қалай құруға болады?

Зерттеудің мақсаты – Жегалкин көпмүшелігін табудың негізгі алгоритмдерін бірыңғай критерийлермен салыстыру және оларды кезең-кезеңімен меңгертетін оқу моделін ұсыну. Зерттеу нысаны – болашақ математика мұғалімдерін дискретті математикаға оқыту үдерісі; зерттеу пәні – Буль функциясын Жегалкин көпмүшелігіне келтіру тәсілдерін салыстырмалы меңгерту мазмұны мен әдістері. Зерттеу болжамы: егер студент бір функцияны бірнеше алгоритммен түрлендіріп, олардың математикалық негізін, операциялық күрделілігін және қате тәуекелдерін салыстырса, онда оның алгоритмдік және пәндік-әдістемелік құзыреті біртұтас қалыптасады.

## ЗЕРТТЕУ ӘДІСТЕРІ

Зерттеу теориялық-әдістемелік сипатта жүргізілді. Біріншіден, Буль функцияларының алгебралық қалыпты формасы, ақиқаттық кесте-ANF ауысуы және Мёбиус түрлендіруі туралы еңбектер мазмұндық талдаудан өткізілді. Екіншіден, төрт тәсіл математикалық негізі, бастапқы дерек формасы, есептеу қадамдарының айқындығы, уақыттық күрделілік, колмен орындауға және бағдарламалауға жарамдылық, типтік қателер және нәтижені тексеру мүмкіндігі бойынша салыстырылды. Үшіншіден, бір функцияны барлық тәсілмен шешу арқылы алгоритмдердің нәтижелік эквиваленттілігі көрсетілді.

Әдістемелік негіз ретінде пәндік мазмұн мен оны оқыту тәсілінің бірлігін талап ететін педагогикалық мазмұндық білім тұжырымдамасы қабылданды. РСК/ТРАСК зерттеулеріне жасалған шолу мұғалім даярлығында мазмұнды білу, білім алушының қате түсініктерін тану, сәйкес репрезентация таңдау және технологияны орынды пайдалану өзара байланыста қарастырылуы тиіс екенін көрсетеді [5]. Сондықтан мақалада алгоритмді білу «дұрыс жауап алумен» ғана емес, оны түсіндіру, салыстыру, тексеру және оқыту қабілеттерімен толықтырылады.

## ТЕОРИЯЛЫҚ НЕГІЗДЕР

Айнымалылары  $x_1, x_2, \dots, x_n$  болатын Буль функциясы  $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$  түрінде беріледі. Оның Жегалкин көпмүшелігі жалпы жағдайда төмендегідей жазылады:

$$f(x_1, \dots, x_n) = S \subseteq 1, \dots, n \oplus a_i x_i \in S \prod_{i \in S} x_i$$

Мұндағы  $\oplus$  – модуль 2 бойынша қосу; демек  $1 \oplus 1 = 0$ ,  $x \oplus x = 0$ ,  $x^2 = x$ . Әрбір Буль функциясының осындай көпмүшелік түріндегі жазылуы бізмәнді. ANF коэффициенттерінің векторы мен функцияның ақиқаттық мәндері бір-бірімен Буль торындағы Мёбиус түрлендіруі арқылы байланысады; бұл түрлендіру инволютивті болғандықтан, сол есептеу сұлбасы ақиқаттық кестеден ANF-ке де, ANF-тен кестеге де көшуге қолданылады [3].

Жегалкин көпмүшелігінің дидактикалық құндылығы оның бірнеше репрезентацияны байланыстыруынан көрінеді: логикалық өрнек, ақиқаттық кесте, коэффициенттер жүйесі және көпмүшелік бір функцияның әртүрлі тілдері. Әдістерді салыстыру студентке осы тілдердің бірінен екіншісіне механикалық емес, құрылымдық ауысуды түсінуге мүмкіндік береді.

Мұндай жұмыс дискретті математикадағы мәселе–болжам–дәлел циклін және балама стратегияларды бағалау әрекетін қолдайды [1].

Эквивалентті түрлендіру әдісінде бастапқы логикалық өрнек  $GF(2)$  алгебрасының тепе-теңдіктері арқылы біртіндеп көпмүшелікке келтіріледі. Негізгі ауыстырулар: терістеу  $\neg x = 1 \oplus x$ , дизъюнкция  $x \vee y = x \oplus y \oplus xy$ , импликация  $x \rightarrow y = 1 \oplus x \oplus xy$ . Әдіс формуланың құрылымын сақтайды және шағын өрнектер үшін түсінікті; алайда жақшаларды ашу кезінде бірдей мүшелерді қысқарту мен модуль 2 заңдарын қолдануда қате ықтималдығы жоғары.

Анықталмаған коэффициенттер әдісінде алдымен  $n$  айнымалыға арналған толық ANF жазылады, кейін ақиқаттық кестенің әр жолы бойынша коэффициенттерге қатысты теңдеулер құрылады. Үш айнымалы үшін жалпы форма  $f(x, y, z) = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 z \oplus a_{12} xy \oplus a_{13} xz \oplus a_{23} yz \oplus a_{123} xyz$  болады. Бұл тәсіл ANF-тің бізмәнділігін және коэффициенттердің мағынасын жақсы ашады, бірақ белгісіздер саны  $2^n = 2^3 = 8$  болғандықтан, көлемді функцияларда теңдеулер жүйесі тез ұлғаяды.

Паскаль үшбұрышы әдісі функция мәндерінің реттелген векторынан басталады. Әрбір келесі қатар көршілес элементтерді модуль 2 бойынша қосу арқылы алынады, ал қатарлардың сол жақ шеткі элементтері ANF коэффициенттерін береді. Тәсіл үш-төрт айнымалы функцияларға қолмен есеп жүргізуге көрнекі және нәтижені жылдам алуға мүмкіндік береді; негізгі қауіп – ақиқаттық кесте жолдарының лексикографиялық ретін немесе коэффициенттерге сәйкес мономдардың ретін бұзу.

Жылдам Мёбиус түрлендіруі мәндер векторын ұзындығы  $2^n = 2^3 = 8$  массив ретінде өңдейді. Әрбір айнымалы бойынша блоктар жұпталып, екінші жартыдағы элементтер бірінші жартымен XOR арқылы жаңартылады. Классикалық «көбелек» алгоритмі  $n \cdot 2^{n-1}$  XOR операциясын орындайды және қосымша үлкен жадыны қажет етпей, массивтің өзінде есептеле алады [3]. Сондықтан ол айнымалылар саны артқанда, әсіресе компьютерлік іске асыруда, жүйелі және сенімді құрал болып табылады.

| Критерий       | Эквивалентті түрлендіру | Анықталмаған коэффициенттер | Паскаль үшбұрышы               | Жылдам Мёбиус          |
|----------------|-------------------------|-----------------------------|--------------------------------|------------------------|
| Бастапқы форма | Логикалық өрнек         | Кесте не функция мәндері    | Мәндер векторы                 | Мәндер векторы         |
| Негізгі идея   | Тепе-теңдіктермен ашу   | Коэффициенттер жүйесін шешу | Айырымдарды mod 2 есептеу      | Көбелек сұлбасымен XOR |
| Қолмен есептеу | Шағын өрнекте қолайлы   | $n \leq 3$ кезінде қолайлы  | $n \leq 4$ кезінде өте қолайлы | Орташа көлемде қолайлы |
| Бағдарламалау  | Орташа                  | Төмен–орташа                | Орташа                         | Жоғары                 |

|                       |                   |                                 |                              |                          |
|-----------------------|-------------------|---------------------------------|------------------------------|--------------------------|
| Күрделілік сипаты     | Өрнекке тәуелді   | 2 <sup>n</sup> белгісізге дейін | Шамамен 2 <sup>n</sup> қадам | 2 <sup>n-1</sup> XOR [3] |
| Негізгі қате          | Қысқартуды ұмыту  | Теңдеуді қате құру              | Реттілікті бұзу              | Индекс/битті қате таңдау |
| Дидактикалық басымдық | Алгебралық мағына | Бірімділік пен коэффициент      | Көрнекілік                   | Алгоритмдік тиімділік    |

Салыстыру үшін  $f(x, y, z) = x \vee (y \wedge z)$  функциясын қарастырайық. Эквивалентті түрлендіру бойынша  $u \vee v = u \oplus v \oplus uv$  формуласында  $u = x$ ,  $v = yz$  деп алсақ:

$$f(x, y, z) = x \oplus yz \oplus xyz.$$

Ақиқаттық кесте жолдарын 00,100,010,110,001,101,011,111 ретімен жазғанда мәндер векторы (0,1, 0,1, 0,1, 1,1) болады. Паскаль үшбұрышы немесе Мёбиус түрлендіруі осы вектордан (0,1,0,0,0,1,1) коэффициенттерін береді, егер мономдар реті 1,  $x$ ,  $y$ ,  $xy$ ,  $z$ ,  $xz$ ,  $yz$ ,  $xyz$  түрінде таңдалса; айнымалылардың биттік реті алдын ала нақты көрсетілуі шарт. Коэффициенттері 1 болатын мүшелерді жинақтау нәтижесінде қайтадан  $x \oplus yz \oplus xyz$  алынады.

Анықталмаған коэффициенттер әдісінде:  $f = a_0 \oplus a_1x \oplus a_2y \oplus a_3z \oplus a_{12}xy \oplus a_{13}xz \oplus a_{23}yz \oplus a_{123}xyz$  деп алынады. Кесте жолдарын ретімен қою арқылы  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = a_3 = a_{12} = a_{13} = 0$ ,  $a_{23} = 1$ ,  $a_{123} = 1$  табылады. Төрт әдістің бір нәтижеге келуі студент үшін тек есептің дұрыстығын тексеру емес, логикалық, кестелік және алгебралық репрезентациялардың эквиваленттілігін түсінудің құралы болады.

Салыстырмалы меңгертуді алты кезеңмен ұйымдастыру ұсынылады. Бірінші кезеңде студенттерге Буль функциясының ақиқаттық кестесі, логикалық формуласы және ANF арасындағы байланыс өзектендіріледі. Екінші кезеңде әр алгоритмнің математикалық негізі жеке түсіндіріледі. Үшінші кезеңде бір функция төрт тәсілмен шешіледі. Төртінші кезеңде студенттер алгоритмдерді критерийлер кестесімен салыстырады. Бесінші кезеңде жаңа есептің берілу формасына қарай әдіс таңдап, таңдауын дәлелдейді. Алтыншы кезеңде нәтижелер басқа әдіспен немесе шағын бағдарламамен тексеріліп, рефлексия жүргізіледі.

| Кезең               | Студент әрекеті                       | Оқытушының әдістемелік міндеті         | Бағаланатын нәтиже            |
|---------------------|---------------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------|
| 1. Диагностика      | Амалдар мен кестені қалпына келтіреді | Алғышарт білімдегі олқылықты анықтайды | GF(2) амалдарын дұрыс қолдану |
| 2. Алгоритмді игеру | Өр тәсілдің қадамын орындайды         | Үлгі, сұлба және қате мысал береді     | Процедуралық дұрыстық         |
| 3. Параллель шешу   | Бір функцияны 2–4 әдіспен шешеді      | Репрезентациялар байланысын ашады      | Нәтижелердің сәйкестігі       |
| 4. Салыстыру        | Күрделілік пен қатені талдайды        | Критерий таңдауға бағыттайды           | Дәлелді салыстыру             |
| 5. Әдіс таңдау      | Тиімді алгоритмді негіздейді          | Ашық және кәсіби тапсырма береді       | Метатанымдық шешім            |
| 6. Тексеру          | Кері түрлендіреді не кодпен тексереді | Рефлексия ұйымдастырады                | Қате диагностикасы            |

Тапсырмалар жүйесі репродуктивті деңгейден зерттеушілік деңгейге өтуі қажет. Алғашқы тапсырмаларда дайын кесте бойынша коэффициенттер табылады; кейін бір функция бірнеше әдіспен шешіліп, операциялар саны салыстырылады; одан соң студент белгілі бір функция үшін ең тиімді тәсілді таңдайды; соңғы деңгейде алгоритмнің псевдокодын құрып, оны Python немесе электрондық кестеде іске асырады және сыныпқа арналған түсіндіру сценарийін дайындайды. Технологияны қосу мазмұнның орнын алмастырмайды, керісінше

қолмен орындалған қадамдарды тексеру және алгоритмдік құрылымды айқындау құралы болуы керек; РСК/ТРАСК шолуы да мазмұн, педагогика және технологияны кешенді қарастыру қажеттігін көрсетеді [5].

Бағалау төрт компонентке сүйенеді: пәндік дұрыстық; алгоритмнің қадамдарын сақтау; әдісті салыстырып, таңдауды негіздеу; нәтижені тексеру және қатені түсіндіру. Болашақ мұғалім үшін соңғы екі компонент ерекше маңызды, себебі кәсіби қызметте ол оқушының тек жауабын емес, қолданған стратегиясын талдауы керек. Сондықтан рубрикада «алгоритмді орындайды» деңгейінен «балама әдістердің шектеулерін түсіндіріп, оқушы қатесінің себебін анықтайды» деңгейіне дейінгі көрсеткіштер белгіленуі тиіс.

### **НӘТИЖЕЛЕР МЕН ТАЛҚЫЛАУ**

Жүргізілген теориялық салыстыру төрт тәсілдің бірін әмбебап деп тану әдістемелік тұрғыдан дұрыс еместігін көрсетті. Эквивалентті түрлендіру логикалық формула құрылымын және  $GF(2)$  тепе-теңдіктерін ашады; анықталмаған коэффициенттер әдісі ANF-тің бірімділігі мен коэффициенттер табиғатын түсіндіреді; Паскаль үшбұрышы кестелік есептеуді көрнекі етеді; жылдам Мёбиус түрлендіруі көлемді дерекке және бағдарламалық іске асыруға тиімді.

М. Barbier және әріптестері толық вектор үшін көбелек алгоритмінің стандартты сипатын көрсетіп, сирек немесе құрылымдалған көпмүшеліктер үшін тізімдік көріністердің тиімді болуы мүмкін екенін дәлелдейді [3]. Бұл нәтиже оқытуда «алгоритм тиімділігі бастапқы репрезентация мен функция құрылымына тәуелді» деген қағиданы бекітеді.

Салыстырмалы тәсіл студенттің математикалық әрекетін үш деңгейде кеңейтеді. Пәндік деңгейде ол бір функцияның әртүрлі репрезентацияларын байланыстырады; алгоритмдік деңгейде қадамдар санын, дерек құрылымын және масштабталуды бағалайды; әдістемелік деңгейде қай түсіндірудің қандай оқушыға және қандай есепке қолайлы екенін пайымдайды. Дискретті математика тапсырмаларының ғылыми математикалық әрекет пен модельдеу құзыретін дамыту әлеуеті туралы қорытындылар бұл құрылыммен үйлеседі [1][2]. Сонымен бірге мақаладағы нәтиже теориялық-әдістемелік сипатта екенін ескеру қажет. Ұсынылған модельдің оқу жетістігіне әсерін дәлелдеу үшін болашақта бақылау және эксперименттік топтар қатысатын педагогикалық эксперимент қажет. Өлшеу құралы алгоритмді дұрыс орындаумен қатар, әдіс таңдау, негіздеу, қате табу және шағын бағдарламалық іске асыру көрсеткіштерін қамтуы тиіс. Алдын ала және қорытынды диагностика нәтижелерін тиісті статистикалық әдістермен салыстыру ұсынылады.

### **ҚОРЫТЫНДЫ**

Жегалкин көпмүшелігін меңгертудің тиімді әдістемесі бір алгоритмді қайталатуға емес, өзара толықтыратын тәсілдерді саналы салыстыруға негізделуі тиіс. Эквивалентті түрлендіру мазмұндық мағынаны, анықталмаған коэффициенттер әдісі теориялық бірімділікті, Паскаль үшбұрышы есептік көрнекілікті, ал жылдам Мёбиус түрлендіруі алгоритмдік жүйелілік пен цифрлық іске асыруды қамтамасыз етеді. Осы тәсілдерді «түсіну – параллель шешу – салыстыру – таңдау – тексеру – рефлексия» циклімен оқыту болашақ математика мұғалімінің пәндік, алгоритмдік және пәндік-әдістемелік құзыреттерін сабақтастырады.

Практикалық тұрғыдан оқу сабақтарында әрбір жаңа функция үшін бастапқы берілу формасы, айнymалылар саны және оқу мақсаты ескеріліп, әдіс таңдау тапсырмасы берілуі қажет. Студент алынған көпмүшелікті кемінде бір тәуелсіз жолмен тексеріп, алгоритмнің ықтимал қателерін түсіндіруі тиіс. Мұндай ұйымдастыру Жегалкин көпмүшелігін формалды тақырыптан алгоритмдік ойлау мен мұғалімнің кәсіби шешім қабылдауын дамытатын мазмұнға айналдырады.

### ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Colipan X., Liendo A. Discrete mathematics as a resource for developing scientific activity in the classroom // ZDM – Mathematics Education. – 2022. – Vol. 54, No. 4. – P. 909–923. DOI: 10.1007/s11858-022-01380-4.
2. Greefrath G., Siller H.-S., Vorhölter K., Kaiser G. Mathematical modelling and discrete mathematics: opportunities for modern mathematics teaching // ZDM – Mathematics Education. – 2022. – Vol. 54, No. 4. – P. 865–879. DOI: 10.1007/s11858-022-01339-5.
3. Barbier M., Cheballah H., Le Bars J.-M. On the computation of the Möbius transform. – arXiv:2004.11146, 2020.
4. O'Donnell R. Analysis of Boolean Functions. – Cambridge: Cambridge University Press, 2014. – 444 p.; corrected electronic edition: arXiv:2105.10386, 2021.
5. Habiyaemye H. T., Ntivuguruzwa C., Ntawiha P. From pedagogical content knowledge toward technological pedagogical content knowledge frameworks and their effectiveness in teaching mathematics: a mapping review // F1000Research. – 2023. – Vol. 11. – Art. 1029. DOI: 10.12688/f1000research.125073.2.
6. Carlet C. Boolean Functions for Cryptography and Coding Theory. – Cambridge: Cambridge University Press, 2021.
7. Crama Y., Hammer P. L. Boolean Functions: Theory, Algorithms, and Applications. – Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
8. Rosen K. H. Discrete Mathematics and Its Applications. – 8th ed. – New York: McGraw-Hill Education, 2019.
9. Shulman L. S. Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching // Educational Researcher. – 1986. – Vol. 15, No. 2. – P. 4–14.
10. Ball D. L., Thames M. H., Phelps G. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? // Journal of Teacher Education. – 2008. – Vol. 59, No. 5. – P. 389–407. DOI: 10.1177/0022487108324554.
11. Muller D. E. Application of Boolean algebra to switching circuit design and to error detection // IRE Transactions on Electronic Computers. – 1954. – Vol. EC-3, No. 3. – P. 6–12.
12. Reed I. S. A class of multiple-error-correcting codes and the decoding scheme // IRE Transactions on Information Theory. – 1954. – Vol. 4, No. 4. – P. 38–49.



**СОДЕРЖАНИЕ  
CONTENT**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ**  
**PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

**ГУЧЕНКО СЕРГЕЙ АЛЕКСЕЕВИЧ, ТУЛЕУОВ СЕРИК ДАУЛЕТОВИЧ, ЖУМАБЕКОВА БАНУБИКЕШ ҚАЙРАТҚЫЗЫ, АФАНАСЬЕВ ДМИТРИЙ АНАТОЛЬЕВИЧ** [КАРАГАНДА, КАЗАХСТАН] ТОНКИЕ ПЛЕНКИ НИТРИДА ТИТАНА, ПОЛУЧЕННЫЕ МЕТОДОМ МАГНЕТРОННОГО РАСПЫЛЕНИЯ ПЕРСПЕКТИВНЫЕ ДЛЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В СОЛНЕЧНЫХ ЯЧЕЙКАХ.....3

**АМИРЕ АРУЖАН БАБАХАНКЫЗЫ, М. БЕКТЕМЕСОВ** [АЛМАТЫ, КАЗАХСТАН] РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СОЛОУ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЭВОЛЮЦИИ.....9

**АВЕТАІ АІZHAN AGABEKKYZY** [ALMATY, KAZAKHSTAN] REGULARIZATION METHODS FOR LINEAR MACHINE LEARNING PROBLEMS.....16

**АЛЬЖАНОВА БАЛНҰР** [ШЫМКЕНТ, ҚАЗАҚСТАН] ЖАРАТЫЛЫСТАНУ-МАТЕМАТИКА БАҒЫТЫНДАҒЫ 10-СЫНЫПТА «ЖЫЛУ ФИЗИКАСЫ» БӨЛІМІН ОҚЫТУДА FLIPPED CLASSROOM ТӘСІЛІН ҚОЛДАНУ .....19

**БАҚТЫГЕРЕЕВА НҰРСИПАТ РИШАТҚЫЗЫ** [АТЫРАУ, ҚАЗАҚСТАН] ДИСКРЕТТІ МАТЕМАТИКАДА ЖЕГАЛКИН КӨПМҮШЕЛІГІН МЕҢГЕРТУДІҢ САЛЫСТЫРМАЛЫ ТӘСІЛДЕРІ...23

# ENDLESS LIGHT IN SCIENCE



**Контакт**



[irc-els@mail.ru](mailto:irc-els@mail.ru)

**Наш сайт**



[irc-els.com](http://irc-els.com)